

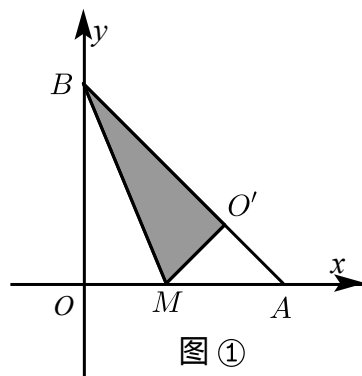
第2讲几何变换之对称

1. 坐标问题

典题精炼

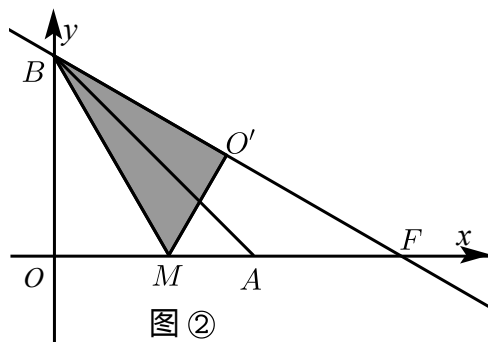
1. 将一个直角三角形纸片 ABO ，放置在平面直角坐标系中，点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2)$ ，点 $O(0,0)$ ．点 M 为边 OA 上的一个动点（点 M 不与点 O ， A 重合），沿着 BM 折叠该纸片，得顶点 O 的对应点 O' ．

（1）如图①，当点 O' 在边 AB 上时，求点 O' 的坐标．



（2）设直线 BO' 与 x 轴相交于点 F ．

① 如图②，当 BA 平分 $\angle MBF$ 时，求点 F 的坐标．



② 当 $OM = \frac{3}{2}$ 时，求点 F 的坐标．（直接写出结果即可）

【答案】（1） $O'(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ ．

（2）① $F(2\sqrt{3}, 0)$ ．

② $F\left(\frac{48}{7}, 0\right)$ ．

【解析】（1）设 $M(t, 0)$ ，则 $OM = O'M = t$ ， $AM = OA - OM = 2 - t$ ，

$$\because AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = 2\sqrt{2}, OB = O'B = 2,$$

$$\therefore AO' = AB - O'B = 2\sqrt{2} - 2,$$

在 $Rt\triangle AO'M$ 中，

$$AO'^2 + MO'^2 = AM^2,$$

$$(2\sqrt{2} - 2)^2 + t^2 = (2 - t)^2,$$

$$\text{解得: } t = 2\sqrt{2} - 2,$$

作 $O'N \perp x$ 轴,

$$\because OB = OA,$$

$$\therefore \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle O'MA = 45^\circ,$$

$$\therefore O'N = MO' \sin \angle O'MA$$

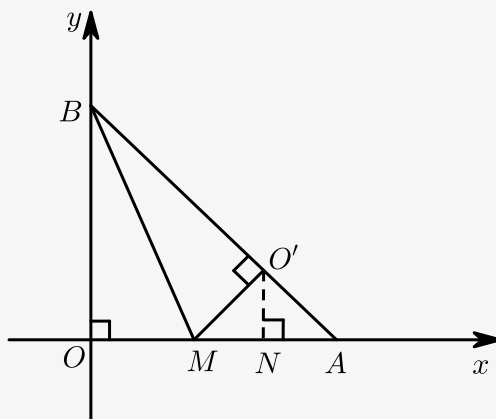
$$= (2\sqrt{2} - 2) \cdot \sin 45^\circ$$

$$= (2\sqrt{2} - 2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore MN = O'N = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore ON = OM + MN = 2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore O'(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}).$$



$$(2) \text{ ① } \because BA \text{ 平分 } \angle MBF,$$

$$\therefore \angle MBA = \angle FBA,$$

$$\because BO = AO,$$

$$\therefore \angle OBA = 45^\circ,$$

设 $\angle OBM$ 的度数为 x ,

$$\therefore \angle MBA = 45^\circ - x,$$

$$\therefore \angle FBA = 45^\circ - x,$$

$$\therefore \angle MBO' = 90^\circ - 2x,$$

$$\therefore \angle BO'M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BMO' = 2x,$$

$$\therefore \angle BMO = \angle BMO',$$

$$\therefore \angle BMO = 2x,$$

$$\therefore \angle OBM + \angle BMO = 90^\circ,$$

$$\therefore x + 2x = 90^\circ,$$

$$\therefore x = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle MBF = 90^\circ - 2x = 30^\circ, \angle BMO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFO = \angle OMB - \angle MBO' = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

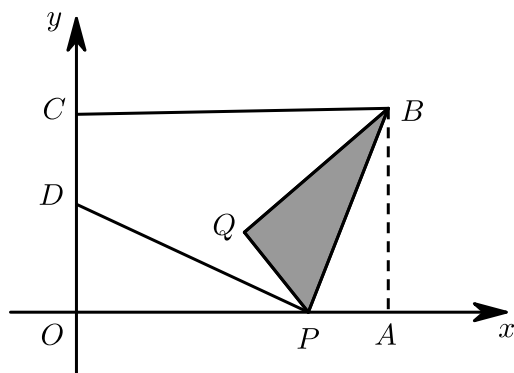
$$\therefore OF = \frac{OB}{\tan \angle BFO} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore F(2\sqrt{3}, 0).$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{2} \because \angle MO'F = \angle BOF = 90^\circ, \triangle FMO' \sim \triangle FBO, \\
& \therefore \frac{MF}{BF} = \frac{O'M}{BO} = \frac{O'F}{OF}, \\
& \therefore OM = \frac{3}{2}, \\
& \therefore O'M = OM = \frac{3}{2}, MF = OF - \frac{3}{2}, \\
& BF = \sqrt{OB^2 + OF^2} = \sqrt{4 + OF^2}, \\
& \therefore \frac{OF - \frac{3}{2}}{\sqrt{4 + OF^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2}, \\
& \text{解得 } OF = 0 \text{ (舍)} \text{ 或 } OF = \frac{48}{7}. \\
& \therefore F\left(\frac{48}{7}, 0\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

2. 如图，在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 为矩形，点 A, C 在 x 轴和 y 轴上，点 $B(5, 3)$ 。 P 是边 OA 上的一动点，将 $\triangle PAB$ 沿直线 BP 折叠，点 A 的落点为 Q ，过点 P 作 $\angle OPQ$ 的平分线交 OC 于点 D ，设 $OD = m$ ， $OP = n$ ($0 < n < 5$)。



- (1) 求 $\angle BPD$ 的度数。
- (2) 求 m 与 n 的函数关系式。
- (3) 当 $CQ = 4$ 时。
 - ① 求 m 的值。
 - ② 求点 Q 的坐标（直接写出结果即可）。

【答案】(1) 90° 。

(2) $m = \frac{-n^2 + 5n}{3} (0 < n < 5)$ 。

(3) ① $\frac{4}{3}$ 。

② $Q\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 。

【解析】(1) $\because \triangle OPB$ 是沿 BP 由 $\triangle APB$ 翻折过来的,

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle OPB \text{ 且 } \angle APB = \angle OPB,$$

又 $\because DP$ 是 $\angle OPQ$ 的角平分线,

$$\therefore \angle OPD = \angle QPD,$$

$$\therefore \angle APB + \angle DPO = \angle DPQ + \angle BPQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ.$$

(2) 连接 BD ,

$$\because B \text{ 点坐标为 } (5, 3),$$

$$\therefore A(5, 0), C(0, 3),$$

$$\therefore OD = m, OP = n,$$

$$\therefore D(0, m), P(n, 0),$$

$$\because \text{由 (1) 知 } \angle BPD = 90^\circ,$$

$$\text{且 } CD = 3 - m, AP = 5 - n,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 由勾股定理:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 5^2 + (3 - m)^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle DOP$ 中, 由勾股定理:

$$DP^2 = OD^2 + OP^2 = m^2 + n^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle BAP$ 中, 由勾股定理:

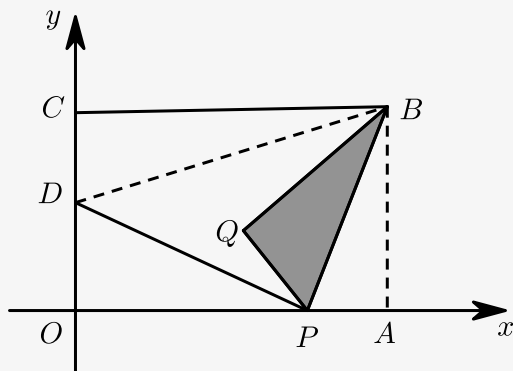
$$BP^2 = AP^2 + AB^2 = (5 - n)^2 + 3^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中, 由勾股定理:

$$BD^2 = BP^2 + DP^2,$$

$$\therefore 5^2 + (3 - m)^2 = (5 - n)^2 + 3^2 + m^2 + n^2,$$

$$\text{整理得 } m = \frac{-n^2 + 5n}{3} (0 < n < 5).$$



(3) ① $\because BQ = 3, CQ = 4, BC = 5,$

$$\therefore BQ^2 + CQ^2 = BC^2,$$

$$\therefore \angle BQC = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle BQP = \angle BAP = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 C, Q, P 三点共线.

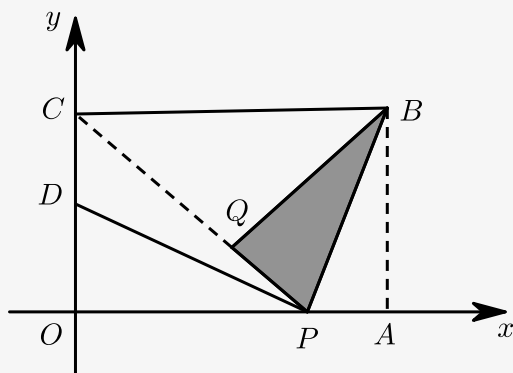
$$\therefore OP = n,$$

$$\therefore AP = 5 - n,$$

$$\therefore QP = 5 - n,$$

$$CP = 4 + 5 - n = 9 - n,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle COP \text{ 中, 由勾股定理知: } OC^2 + OP^2 = CP^2,$$



$$\therefore 3^2 + n^2 = (q - n)^2, \text{ 解得 } n = 4.$$

$$\text{由 (2) 知 } m = \frac{-n^2 + 5n}{3} = \frac{-16 + 5 \times 4}{3} = \frac{4}{3}.$$

② 过 Q 作 $QM \perp OA$, 垂足为点 M , 并设 $Q(x, y)$,

$$\therefore QM \parallel y \text{ 轴且 } \triangle PQM \sim \triangle PCO$$

$$\therefore \text{由 ① 知 } OP = 4, OC = 3,$$

$$OM = x, QM = y,$$

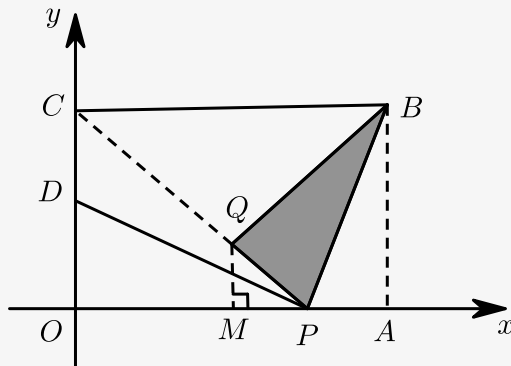
$$QP = 5 - n = 5 - 4 = 1,$$

$$\therefore \frac{PQ}{PC} = \frac{QM}{OC} = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore \frac{1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{4-x}{4},$$

$$\therefore x = \frac{16}{5}, y = \frac{3}{5},$$

$$\therefore Q\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

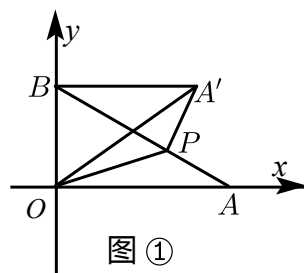


【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

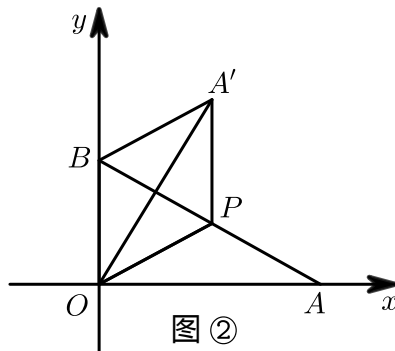
经典再现

3. 将一个直角三角形纸片 ABO 放置在平面直角坐标系中, 点 $A(\sqrt{3}, 0)$, 点 $B(0, 1)$, 点 $O(0, 0)$, P 是边 AB 上的一点 (点 P 不与点 A, B 重合), 沿着 OP 折叠该纸片, 得点 A 的对应点 A' .

(1) 如图①, 当点 A' 在第一象限, 且满足 $A'B \perp OB$ 时, 求点 A' 的坐标.



(2) 如图②, 当 P 为 AB 中点时, 求 $A'B$ 的长.



(3) 当 $\angle BPA' = 30^\circ$ 时, 求点 P 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】(1) 点 A' 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$.

(2) $A'B = 1$.

(3) $(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2})$ 或 $(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

【解析】(1) $\because$ 点 $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 1)$,

$$\therefore OA = \sqrt{3}, OB = 1,$$

根据题意, 由折叠可知 $\triangle A'OP \cong \triangle AOP$,

$$\therefore OA' = OA = \sqrt{3},$$

由 $A'B \perp OB$, 得 $\angle A'BO = 90^\circ$,

$$\text{在 Rt}\triangle A'OB \text{ 中, } A'B = \sqrt{OA'^2 - OB^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $OA = \sqrt{3}$, $OB = 1$,

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2,$$

$\because P$ 是 AB 中点,

$$\therefore AP = BP = 1, OP = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore OB = OP = BP,$$

$\therefore \triangle BOP$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BOP = \angle BPO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPA = 180^\circ - \angle BPO = 120^\circ$$

由(1)知, $\triangle A'OP \cong \triangle AOP$,

$$\therefore \angle OPA' = \angle OPA = 120^\circ, PA' = PA = 1,$$

$$\therefore \angle BOP + \angle OPA' = 180^\circ, \text{ 则 } OB \parallel PA',$$

$$\text{又 } OB = PA' = 1,$$

$\therefore$ 四边形 $OPA'B$ 是平行四边形,

$$\therefore A'B = OP = 1.$$

(3) ① 当 $\angle AP_1A_1' = 180^\circ - \angle A_1'PB = 150^\circ$,

即 $\angle OP_1A = 75^\circ$ 时,

$\therefore \triangle AOP_1$ 是等腰三角形,

$$\therefore BP_1 = AB - AP_1 = AB - OA = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P_1 \text{ 的横坐标为 } x_P = BP_1 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

$$\text{纵坐标 } y_P = OB - BP_1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore P_1\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

②当 $\angle AP_2A_2' = \angle AP_2B + \angle BP_2A_2' = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$,

即 $\angle OP_2A = 105^\circ$ 时,

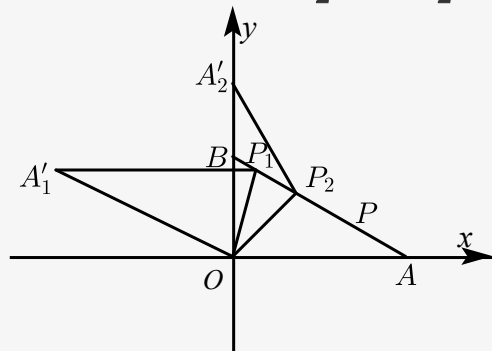
此时, $\angle P_2OA = \angle P_2OA_2' = 45^\circ$,

设直线 OP_2 的解析式为 $y = x$,

$$y_{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1,$$

$$\therefore P_2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right).$$

综上, 点 P 的坐标是 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



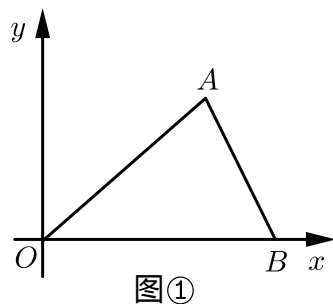
【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

2. 线段问题

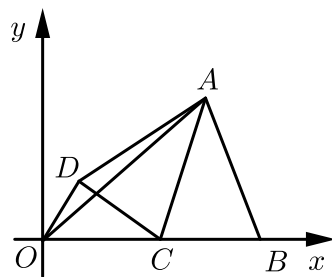
典题精炼

4. 把三角形纸片 OAB 放置在平面直角坐标系中, 点 $A\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$, 点 B 在 x 轴的正半轴上, 且 $OB = 5$.

(1) 如图①, 求 OA , AB 的长及点 B 的坐标.



(2) 如图②, 点 C 是 OB 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折得到 $\triangle ADC$.



图②

- ① 求四边形 $ADCB$ 的面积 .
- ② 求证： $\triangle ABC$ 是等腰三角形 .
- ③ 求 OD 的长（直接写出结果即可） .

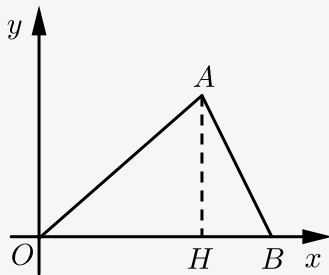
【答案】 (1) $4; 3; B(5,0)$.

(2) ① 6 .

② 证明见解析 .

③ $\frac{7}{5}$.

【解析】 (1) 过点 A 作 $AH \perp OB$ ，垂足为点 H ，



由点 $A\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ，
得 $OH = \frac{16}{5}$ ， $AH = \frac{12}{5}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OAH$ 中 $OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 4$ ，

$HB = OB - OH = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$ ，

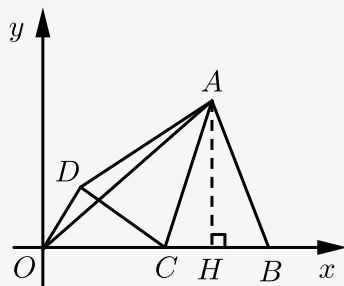
在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中，

$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = 3$ ，

$\because$ 点 B 在 x 轴的正半轴上，且 $OB = 5$ ，

$\therefore B(5,0)$.

(2) ① 过点 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H ，



$\therefore C$ 是 OB 中点,

$$\therefore BC = \frac{1}{2}OB = \frac{5}{2},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{12}{5} = 3,$$

$\therefore \triangle ADC$ 由 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折得到,

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ADCB} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \times 3 = 6.$$

② 由(I)知 $OA = 4$, $AB = 3$,

$$\therefore OA^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25,$$

$$OB^2 = 5^2 = 25,$$

$$\therefore OA^2 + AB^2 = OB^2,$$

$\therefore \triangle OAB$ 是直角三角形, $\angle OAB = 90^\circ$,

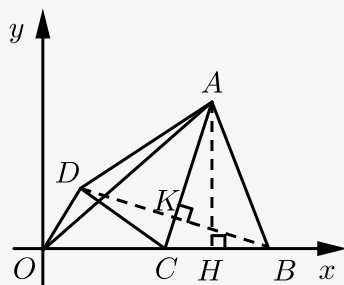
$\therefore C$ 是 OB 中点,

$$\therefore AC = \frac{1}{2}OB = BC,$$

即 $AC = BC$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

③ 连接 BD 交 AC 于点 K , 过 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H ,



$\therefore$ 翻折,

$$\therefore BD \perp AC, \text{ 且 } BK = DK,$$

$\therefore$ 点 K 是 BD 的中点,

又 $\therefore$ 点 C 是 OB 中点,

$\therefore KC$ 是 $\triangle OBD$ 的中位线,

$$\therefore CK = \frac{1}{2}OD,$$

$$\text{即 } OD = 2CK.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}AC \cdot BK,$$

$$\text{且由②知 } AC = BC,$$

$$\therefore AH = BK = \frac{12}{5},$$

在 $Rt\triangle BCK$ 中,

$$CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{7}{10},$$

$$\therefore OD = 2CK = 2 \times \frac{7}{10} = \frac{7}{5}.$$

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

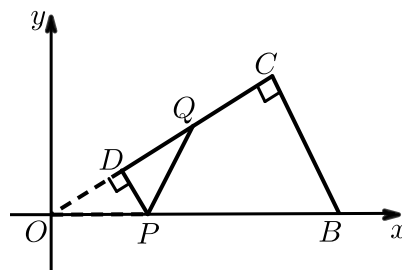
【知识点】三角形的中位线

【知识点】直接用勾股求边长

3. 重叠部分面积

典题精炼

5. 如图, 将三角形纸片 OBC 放在平面直角坐标系中, $\angle OCB = 90^\circ$, $\angle COB = 30^\circ$, $OB = 4\text{cm}$, 点 B 在 x 轴的正半轴上, 点 $P(t, 0)$ 是边 OB 上的一个动点 (点 P 不与点 O 、 B 重合), 过点 P 作 $PD \perp OC$ 于点 D , 沿 DP 折叠该纸片, 使点 O 落在射线 DC 上的 Q 点处.



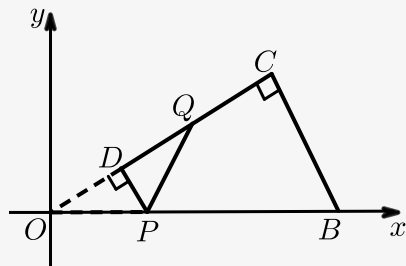
- (1) 用含 t 的代数式表示线段 CD 的长.
- (2) 当点 Q 与点 C 重合时, 求 t 的值.
- (3) 设 $\triangle PDQ$ 与四边形 $DPBC$ 重叠部分的图形的面积为 S , 求 S 与 t 之间的函数关系式.

【答案】(1) $CD = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t (0 < t < 4)$.

(2) 2.

$$(3) \quad S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{8}t^2 (0 < t \leq 2) \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2 + 2\sqrt{3}t - 2\sqrt{3} (2 < t < 4) \end{cases}.$$

【解析】(1)



在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, $\angle COB = 30^\circ$, $OB = 4$,

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{OC}{OB}, OC = 2\sqrt{3},$$

$\therefore PD \perp OC$,

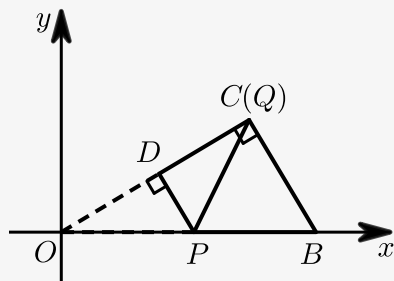
$$\therefore \angle ODP = \angle CDP = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ODP$ 中, $OP = t$,

$$\therefore DP = \frac{1}{2}t, OD = OP \cdot \cos \angle COB = OP \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore CD = OC - OD = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t (0 < t < 4).$$

(2)



$\therefore PD \perp OC$ 于点 D , 点 Q 与点 C 重合,

$$\therefore OD = DC,$$

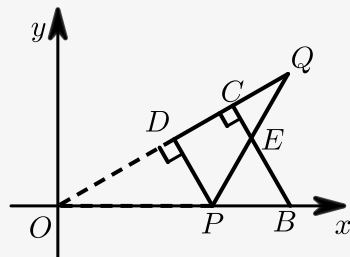
$\therefore DP$ 垂直平分 OC ,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}OC = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t = \sqrt{3},$$

$$\therefore t = 2.$$

(3)



当 $0 < t \leq 2$ 时,

$$\text{由 (1) 得 } DP = \frac{1}{2}t, DQ = OD = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$S = S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{2} \times DQ \times DP = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}t \times \frac{1}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{8}t^2;$$

当 $2 < t < 4$ 时, 设 PQ 与 CB 交于点 E ,

$$CQ = OQ - OC = 2OD - OC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}t - 2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle CEQ$ 中, $\angle CQE = 30^\circ$,

$$\therefore CE = CQ \cdot \tan \angle CQE = \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}t - 2\sqrt{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = t - 2,$$

$$\therefore S = S_{\triangle PDQ} - S_{\triangle ECQ} = \frac{1}{2} \times DQ \times DP - \frac{1}{2} \times CQ \times CE,$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}t^2 - \frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}t - 2\sqrt{3}\right) \times (t - 2)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2 + 2\sqrt{3}t - 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{8}t^2 (0 < t \leq 2) \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2 + 2\sqrt{3}t - 2\sqrt{3} (2 < t < 4) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

经典再现

6. 将一个直角三角形纸片 ABO , 放置在平面直角坐标系中, 点 $A(\sqrt{3}, 0)$, 点 $B(0, 1)$, 点 $O(0, 0)$. 过边 OA 上的动点 M (点 M 不与点 O, A 重合) 作 $MN \perp AB$ 于点 N , 沿着 MN 折叠该纸片, 得顶点 A 的对应点 A' . 设 $OM = m$, 折叠后的 $\triangle A'MN$ 与四边形 $OMNB$ 重叠部分的面积为 S .

(1) 如图1, 当点 A' 与顶点 B 重合时, 求点 M 的坐标.

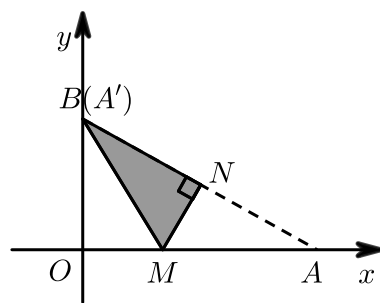


图 1

(2) 如图2, 当点 A' 落在第二象限时, $A'M$ 与 OB 相交于点 C , 试用含 m 的式子表示 S .

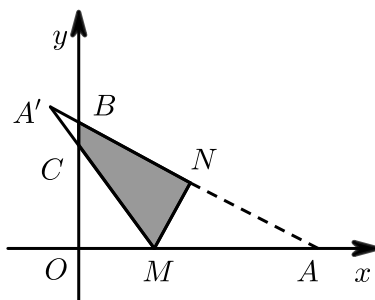


图 2

(3)

当 $S = \frac{\sqrt{3}}{24}$ 时, 求点 M 的坐标 (直接写出结果即可) .

【答案】(1) 点 M 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$.

(2) $S = -\frac{5\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + \frac{\sqrt{3}}{8} (0 < m < \frac{\sqrt{3}}{3})$.

(3) 点 M 的坐标为 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

【解析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, 点 $A(\sqrt{3}, 0)$, 点 $B(0, 1)$, 点 $O(0, 0)$,

$$\therefore OA = \sqrt{3}, OB = 1.$$

$$\text{由 } OM = m, \text{ 得 } AM = OA - OM = \sqrt{3} - m.$$

根据题意, 由折叠可知 $\triangle BMN \cong \triangle AMN$, 有 $BM = AM = \sqrt{3} - m$.

在 $\text{Rt}\triangle MOB$ 中, 由勾股定理, $BM^2 = OB^2 + OM^2$,

$$\text{得 } (\sqrt{3} - m)^2 = 1 + m^2, \text{ 解得 } m = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $\tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \angle OAB = 30^\circ.$$

由 $MN \perp AB$, 得 $\angle MNA = 90^\circ$.

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle AMN \text{ 中, 得 } MN = AM \cdot \sin \angle OAB = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - m),$$

$$AN = AM \cdot \cos \angle OAB = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - m),$$

$$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AN = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3} - m)^2.$$

由折叠可知, $\triangle A'MN \cong \triangle AMN$, 有 $\angle A' = \angle OAB = 30^\circ$,

$$\therefore \angle A'MO = \angle A' + \angle OAB = 60^\circ.$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle COM \text{ 中, 得 } CO = OM \cdot \tan \angle A'MO = \sqrt{3}m,$$

$$\therefore S_{\triangle COM} = \frac{1}{2}OM \cdot CO = \frac{\sqrt{3}}{2}m^2.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{于是, } S = S_{\triangle ABO} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle COM}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3} - m)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}m^2,$$

$$\text{即 } S = -\frac{5\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + \frac{\sqrt{3}}{8} (0 < m < \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

(3) 当 $0 < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 令 $S = -\frac{5\sqrt{3}}{8}m^2 + \frac{3}{4}m + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{24}$,

解得 $x = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{57}}{15}$, 经检验, 两根均不在 $0 < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 之间, 舍去.

$$\text{当 } \frac{\sqrt{3}}{3} < m < \sqrt{3} \text{ 时, } S = S_{\triangle AMN} = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3} - m)^2,$$

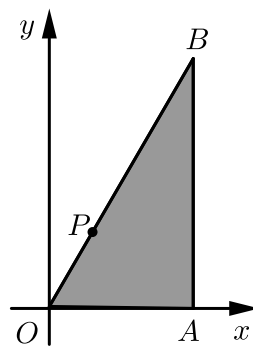
$$\text{令 } S = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3} - m)^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}, \text{ 解得 } m_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (舍)}, m_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

7. 将一个直角三角形纸片 OAB 放置在平面直角坐标系中, 点 $O(0,0)$, 点 $A(2,0)$, 点 B 在第一象限, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 点 P 在边 OB 上 (点 P 不与点 O, B 重合).

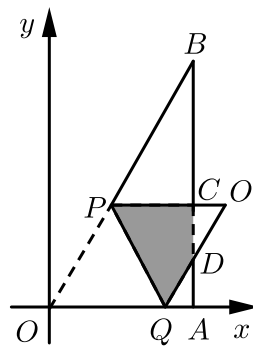
(1) 如图①, 当 $OP = 1$ 时, 求点 P 的坐标.



图①

(2) 折叠该纸片, 使折痕所在的直线经过点 P , 并与 x 轴的正半轴相交于点 Q , 且 $OQ = OP$, 点 O 的对应点为 O' , 设 $OP = t$.

- ① 如图②, 若折叠后 $\triangle O'PQ$ 与 $\triangle OAB$ 重叠部分为四边形, $O'P, O'Q$ 分别与边 AB 相交于点 C, D , 试用含有 t 的式子表示 $O'D$ 的长, 并直接写出 t 的取值范围.



图②

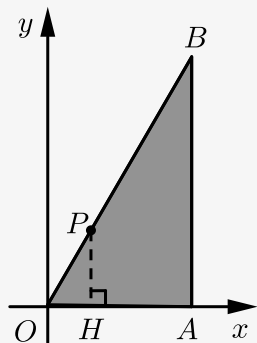
- ② 若折叠后 $\triangle O'PQ$ 与 $\triangle OAB$ 重叠部分的面积为 S , 当 $1 \leq t \leq 3$ 时, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】(1) 点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) ① $O'D = 3t - 4$, t 的取值范围是 $\frac{4}{3} < t < 2$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{4\sqrt{3}}{7} .$$

【解析】(1) 如图，



过点 P 作 $PH \perp x$ 轴，垂足为 H ，则 $\angle OHP = 90^\circ$ ，

$$\because \angle OAB = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOA = 90^\circ - \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPH = 90^\circ - \angle POH = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle OHP$ 中， $OP = 1$ ，

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OP = \frac{1}{2}, HP = \sqrt{OP^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

(2) ① 由折叠知， $\triangle O'PQ \cong \triangle OPQ$ ，

$$\therefore O'P = OP, O'Q = OQ,$$

$$\text{又 } OQ = OP = t,$$

$$\therefore O'P = OP = OQ = O'Q = t,$$

$\therefore$ 四边形 $OQO'P$ 为菱形.

$$\therefore QO' \parallel OB, \text{ 可得 } \angle ADQ = \angle B = 30^\circ,$$

$$\because \text{点 } A(2, 0),$$

$$\therefore OA = 2,$$

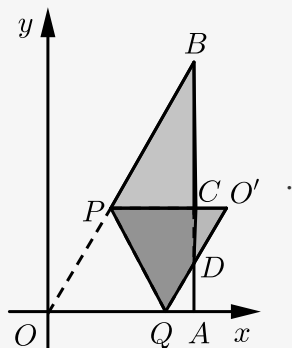
$$\text{有 } QA = OA - OQ = 2 - t,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle QAD \text{ 中}, QD = 2QA = 4 - 2t,$$

$$\therefore O'D = O'Q - QD,$$

$$\therefore O'D = 3t - 4, \text{ 其中 } t \text{ 的取值范围是 } \frac{4}{3} < t < 2.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{4\sqrt{3}}{7} .$$



【标注】【知识点】其它翻折问题

4. 落点问题

典题精炼1

8. 将一个直角三角形纸片 ABO 放置在平面直角坐标系中，点 $A(3,0)$ ，点 $B(0,4)$ ，点 $O(0,0)$ 。 P 是边 AB 上的一点（点 P 不与点 A ， B 重合），沿着 OP 折叠该纸片，得点 B 的对应点 B' 。

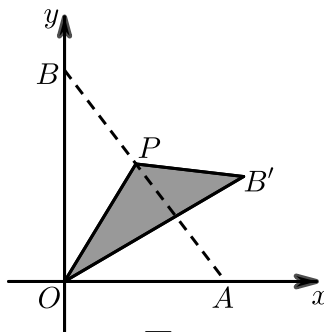


图 ①

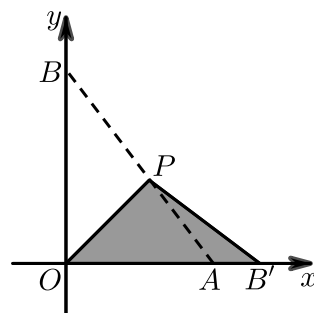


图 ②

- (1) 如图①，当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时，求点 B' 的坐标。
 (2) 如图②，当点 B' 落在 x 轴上时，求点 P 的坐标。
 (3) 当 PB' 与坐标轴平行时，求点 B' 的坐标（直接写出结果即可）。

【答案】(1) $B'(2\sqrt{3}, 2)$ 。

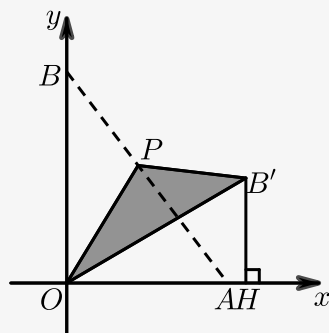
(2) $P\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$ 。

(3) $B'\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ 。

【解析】(1) 由折叠知 $\angle BOP = \angle B'OP = 30^\circ$ ，

$$OB' = OB = 4,$$

$$\therefore \angle AOB' = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$



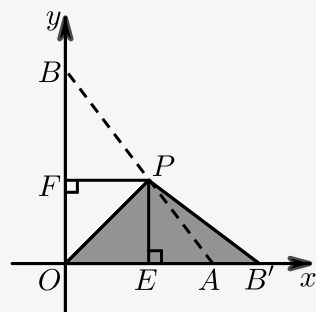
过点 B' 作 $B'H \perp x$ 轴于 H 点,

$$B'H = OB' \sin \angle B'OH = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$OH = OB' \cos \angle B'OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore B'(2\sqrt{3}, 2).$$

(2) 由折叠知: $\angle BOP = \angle B'OP = 45^\circ$,



过 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E , $PF \perp y$ 轴于 F , $PE = PF$,

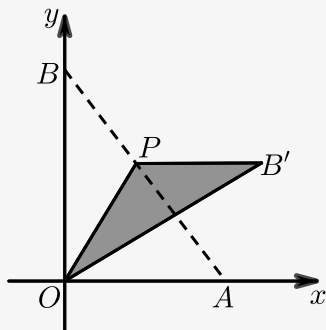
$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6,$$

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2} OA \cdot PE + \frac{1}{2} OB \cdot PF = \frac{1}{2} PE(OA + OB) = \frac{7}{2} PE,$$

$$\therefore \frac{7}{2} PE = 6, \text{ 得: } PE = \frac{12}{7},$$

$$\therefore P\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right).$$

(3) ①当与 x 轴平行时, 如图:

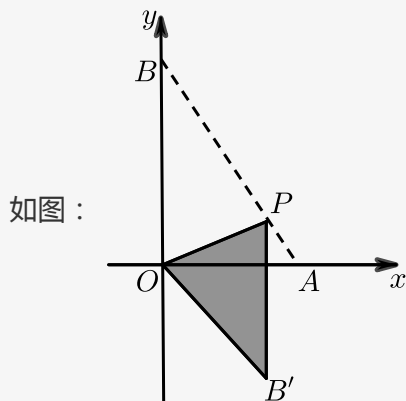


由折叠: $\angle B' = \angle ABO$,

$$\therefore PB' \parallel OA,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle AOB' &= \angle B', \\
 \therefore \angle ABO &= \angle AOB', \\
 \therefore OB' \cos \angle AOB' &= OB' \sin \angle ABO = \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5}, \\
 OB' \cos \angle AOB' &= OB' \cos \angle ABO = \frac{4}{5} \times 4 = \frac{16}{5}. \\
 \therefore B' &\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5} \right).
 \end{aligned}$$

②当与 y 轴平行时，

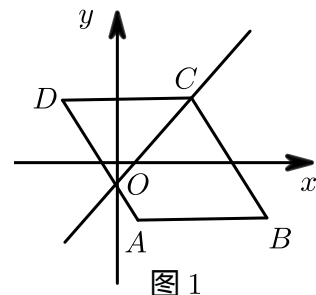


此时平行四边形 $BOB'P$ 为菱形，

$$\begin{aligned}
 \therefore BO &= BP = 4, \\
 \therefore BP \sin \angle ABO &= 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}, \\
 BP \cos \angle ABO &= 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}, \\
 \text{故 } B' &\left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5} \right), \\
 \text{综述, } B' &\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5} \right) \text{ 或 } \left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5} \right).
 \end{aligned}$$

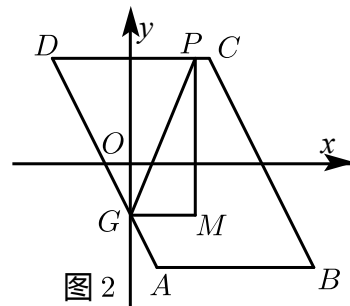
【标注】【知识点】象限内坐标的特征

9. 如图 1，已知平行四边形 $ABCD$ ， $AB \parallel x$ 轴， $AB = 6$ ，点 A 的坐标为 $(1, -4)$ ，点 D 的坐标为 $(-3, 4)$ ，点 B 在第四象限，点 P 是平行四边形 $ABCD$ 边上的一个动点。



- (1) 若点 P 在边 BC 上， $PD = CD$ ，求点 P 的坐标。
- (2) 若点 P 在 AB ， AD 上，点 P 关于坐标轴对称的点 Q 落在直线 $y = x - 1$ 上，求点 P 的坐标。

- (3) 若点 P 在 CD 上, 点 G 是 AD 与 y 轴的交点, 如图2, 过点 P 作 y 轴的平行线 PM , 过点 G 作 x 轴的平行线 GM , 它们相交于点 M , 将 $\triangle PGM$ 沿直线 PG 翻折, 求点 M 的对应点落在坐标轴上时, 求点 P 的坐标. (直接写出答案)



【答案】 (1) $(3, 4)$.

(2) $(-3, -4)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(5, -4)$ 或 $(3, -4)$.

(3) $P\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 4\right)$, $P\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 4\right)$.

【解析】 (1) $\because CD = 6$,

$\therefore$ 点 P 与点 C 重合,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(3, 4)$.

(2) ① 当点 P 在边 AD 上时,

由已知得, 直线 AD 的函数表达式为 $y = -2x - 2$,

设 $P(a, -2a - 2)$, 且 $-3 \leq a \leq 1$,

若点 P 关于 x 轴对称点 $Q_1(a, 2a + 2)$ 在直线 $y = x - 1$ 上,

$\therefore 2a + 2 = a - 1$, 解得 $a = -3$, 此时 $P(-3, -4)$;

若点 P 关于 y 轴对称点 $Q_2(-a, -2a - 2)$ 在直线 $y = x - 1$ 上,

$\therefore -2a - 2 = -a - 1$, 解得 $a = -1$, 此时 $P(-1, 0)$;

② 当点 P 在边 AB 上时,

设 $P(a, -4)$, 且 $1 \leq a \leq 7$,

若点 P 关于 x 轴对称点 $Q_3(a, 4)$ 在直线 $y = x - 1$ 上,

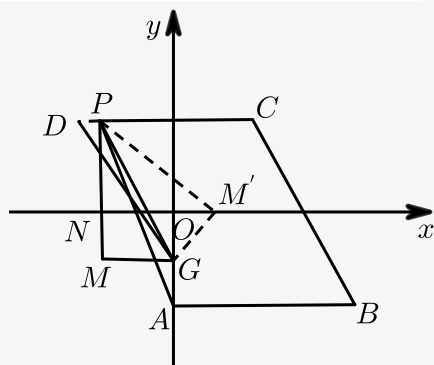
$\therefore 4 = a - 1$, 解得 $a = 5$, 此时 $P(5, -4)$,

若点 P 关于 y 轴对称点 $Q_4(-a, -4)$ 在直线 $y = x - 1$ 上,

$\therefore -4 = -a - 1$, 解得 $a = 3$, 此时 $P(3, -4)$,

综上所述, 点 P 的坐标为 $(-3, -4)$ 或 $(-1, 0)$ 或 $(5, -4)$ 或 $(3, -4)$.

(3) 如图,

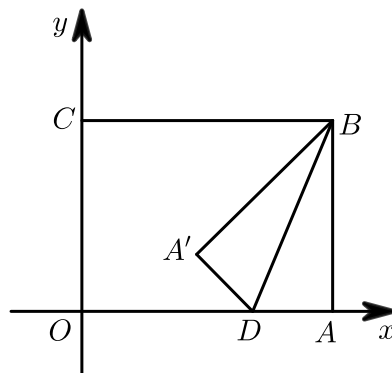


P 在线段 CD 上时, 设 $P(m, 4)$,
 在 $\text{Rt}\triangle PNM'$ 中,
 $\therefore PM = PM' = 6$,
 $PN = 4$,
 $\therefore NM' = \sqrt{M'P^2 - ON^2} = 2\sqrt{5}$,
 在 $\text{Rt}\triangle OGM'$ 中,
 $\therefore OG^2 + OM'^2 = GM'^2$,
 $2^2 + (2\sqrt{5} + m)^2 = m^2$,
 $m = -\frac{6\sqrt{15}}{5}$,
 $\therefore P\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, 4\right)$,
 根据对称性可知, $P\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ 也满足条件.

【标注】【知识点】动点与平行四边形问题

典题精炼2

10. 如图, 将矩形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 A 在 x 轴的正半轴上, $B(8, 6)$, 点 D 是射线 AO 上的一点, 把 $\triangle BAD$ 沿直线 BD 折叠, 点 A 的对应点为 A' .



- (1) 若点 A' 落在矩形的对角线 OB 上时, OA' 的长= _____ .
 (2) 若点 A' 落在边 AB 的垂直平分线上时, 求点 D 的坐标.

(3) 若点 A' 落在边 AO 的垂直平分线上时, 求点 D 的坐标. (直接写出结果即可)

【答案】 (1) 4

(2) $D(8 - 2\sqrt{3}, 0)$.

(3) $D(3\sqrt{5} - 1, 0)$ 或 $(-3\sqrt{5} - 1, 0)$.

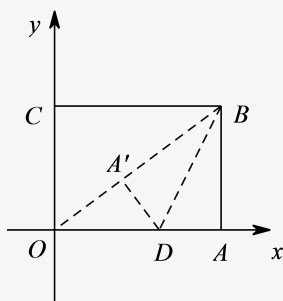
【解析】 (1) 如图: A', O, B 共线,

$$\therefore OA' = OB - BA'$$

$$= OB - BA,$$

$$\text{又}\because \text{在Rt}\triangle AOB\text{中}, OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$\therefore OA' = 10 - 6 = 4.$$



(2) $\because A'$ 在 AB 边的垂直平分线上,

$$\therefore A'B = A'A,$$

由折叠可知 $AB = A'B$,

$\therefore \triangle BA'A$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle A'BA = \angle BAA' = \angle BA'A = 60^\circ,$$

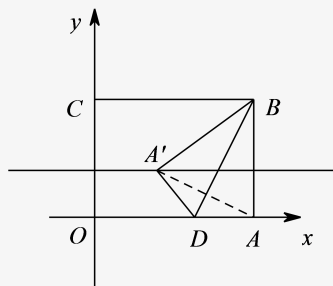
$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABA' = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中,

$$AD = BA \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = 8 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore D(8 - 2\sqrt{3}, 0).$$



(3) ①当 A' 落在矩形 $OACB$ 内部时,

由题意可知 $OF = CE = 4$,

设 $FD = x$,

$A'B = AB = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle BEA'$ 中 ,

$$A'B^2 = BE^2 + A'E^2 ,$$

$$A'E = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} ,$$

$$\therefore A'F = 6 - 2\sqrt{5} ,$$

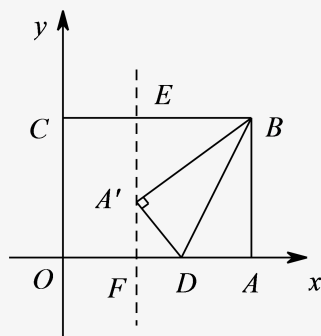
易证 $\triangle BEA' \sim \triangle A'FD$,

$$\frac{BE}{A'E} = \frac{A'F}{FD} ,$$

$$x = \frac{2\sqrt{5}(6 - 2\sqrt{5})}{4} = 3\sqrt{5} - 5 ,$$

$$OD = OF + FD = 4 + 3\sqrt{5} - 5 = 3\sqrt{5} - 1 ,$$

$$\therefore D(3\sqrt{5} - 1, 0) .$$



②当 A' 落在矩形 $OABC$ 外部时 ,

同理设 $FD = x$,

$\triangle A'DF \sim \triangle BAE$,

$$\frac{A'F}{DF} = \frac{BE}{AE} ,$$

$$x = \frac{2\sqrt{5}(6 + 2\sqrt{5})}{4} = 3\sqrt{5} + 5 ,$$

$$OD = DF - OF = 3\sqrt{5} + 5 - 4 = 3\sqrt{5} + 1 ,$$

$$\therefore D(-3\sqrt{5} - 1, 0) ,$$

$$\therefore D(3\sqrt{5} - 1, 0) \text{ 或 } (-3\sqrt{5} - 1, 0) .$$

【解析】(1) $\because$ 点B的坐标是(8, 6),

$$\therefore AB=8, OA=6,$$

$$\text{在Rt}\triangle OAB\text{中}, OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 10.$$

$$\text{根据题意}, OQ = OA = 6, \angle BAO = \angle BQP = 90^\circ,$$

$$\text{又}\because \angle ABO = \angle QBP,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OAB \sim \text{Rt}\triangle PQB,$$

$$\therefore \frac{OB}{PB} = \frac{AB}{QB},$$

$$\therefore \frac{10}{PB} = \frac{8}{10-6},$$

$$\therefore PB = 5,$$

$$\therefore AP = 3,$$

$$\therefore P(3, 6).$$

(2) ① 连接PM, 根据题意, $PA = PQ$,

$$\therefore \text{点P是AB中点},$$

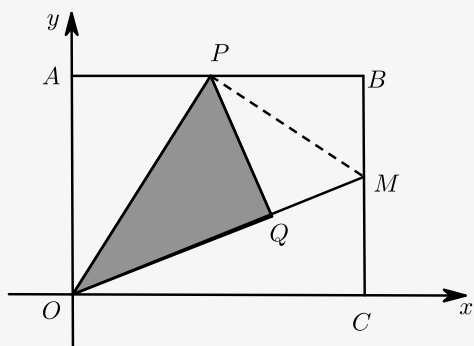
$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore PB = PQ,$$

$$\therefore PM = PM,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle PMB \cong \text{Rt}\triangle PMQ,$$

$$\therefore MB = MQ.$$



图②

② 如图, 过点Q作QN⊥x轴于点N,

设CM = m, 则由(1)知

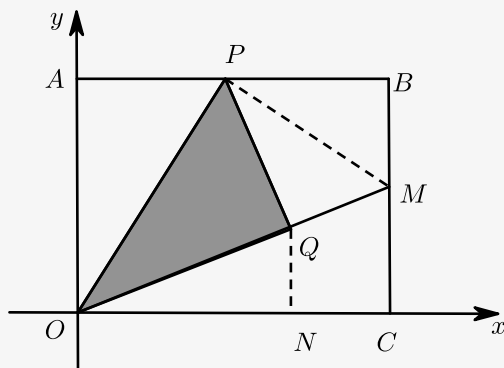
$$MB = MQ = 6 - m,$$

根据题意, 知OQ = OA = 6,

$$\therefore OM = OQ + MQ = 12 - m,$$

在Rt△OCM中,

$$OM^2 = OC^2 + CM^2,$$



图②

$$\text{即 } 12 - m^2 = 8^2 + m^2, \text{ 解得 } m = \frac{10}{3},$$

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$$\therefore \angle BCO = 90^\circ,$$

$\therefore QN \perp x$ 轴于点 N ,

$$\therefore \angle QNO = 90^\circ, \angle QNO = \angle BCO,$$

$$\therefore MC \parallel QN,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle QNO \sim \text{Rt}\triangle MCO,$$

$$\therefore \frac{OQ}{QM} = \frac{QN}{MC} = \frac{ON}{OC},$$

$$\therefore \frac{\frac{26}{3}}{6} = \frac{\frac{10}{3}}{8} = \frac{ON}{8},$$

$$\text{得 } QN = \frac{30}{13}, ON = \frac{72}{13},$$

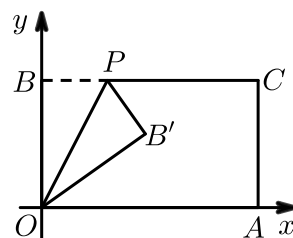
$$\therefore Q\left(\frac{72}{13}, \frac{30}{13}\right).$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

典题精炼3

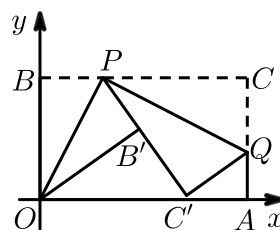
12. 已知一个矩形纸片 $OACB$, 将该纸片放置在平面直角坐标系中, 点 $A(11, 0)$, $B(0, 6)$, 点 P 为 BC 上的动点 (点 P 不与点 B, C 重合), 经过点 O, P 折叠该纸片, 得点 B' 和折痕 OP , 设 $BP = t$.

(1) 如图①, 当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时, 求点 P 的坐标.



图①

(2) 如图②, 经过点 P 再次折叠纸片, 使点 C 落在直线 PB' 上, 得点 C' 和折痕 PQ , 若 $AQ = m$, 求 m 关于 t 的函数解析式.



图②

(3) 在 (2) 的条件下, 当点 C' 恰好落在 OA 上时, 求点 P 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】(1) $(2\sqrt{3}, 6)$.

(2) $m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6 (0 < t < 11)$.

(3) $\left(\frac{11 - \sqrt{13}}{3}, 6\right)$ 或 $\left(\frac{11 + \sqrt{13}}{3}, 6\right)$.

【解析】(1) 根据题意, $\angle OBP = 90^\circ$, $OB = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle OBP$ 中, 由 $\angle BOP = 30^\circ$, $BP = t$, 得 $OP = 2t$,

$$\therefore OP^2 = OB^2 + BP^2,$$

$$\text{即 } (2t)^2 = 6^2 + t^2,$$

$$\text{解得: } t_1 = 2\sqrt{3}, t_2 = -2\sqrt{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{3}, 6).$$

(2) $\because \triangle OB'P$ 、 $\triangle QC'P$ 分别是由 $\triangle OBP$ 、 $\triangle QCP$ 折叠得到的,

$$\therefore \triangle OB'P \cong \triangle OBP, \triangle QC'P \cong \triangle QCP,$$

$$\therefore \angle OPB' = \angle OPB, \angle QPC' = \angle QPC,$$

$$\therefore \angle OPB' + \angle OPB + \angle QPC' + \angle QPC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OPB + \angle QPC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP + \angle OPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP = \angle CPQ,$$

$$\text{又 } \because \angle OBP = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OBP \sim \triangle PCQ,$$

$$\therefore \frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ},$$

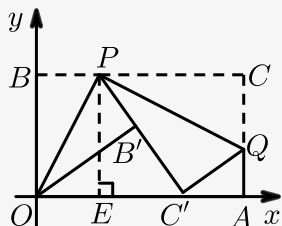
由题意设 $BP = t$, $AQ = m$, $BC = 11$, $AC = 6$,

$$\text{则 } PC = 11 - t, CQ = 6 - m,$$

$$\therefore \frac{6}{11 - t} = \frac{t}{6 - m},$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6 (0 < t < 11).$$

(3) 方法一: 过点 P 作 $PE \perp OA$ 于 E ,



$$\therefore \angle PEA = \angle QAC' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PC'E + \angle EPC' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PC'E + \angle QC'A = 90^\circ,$$

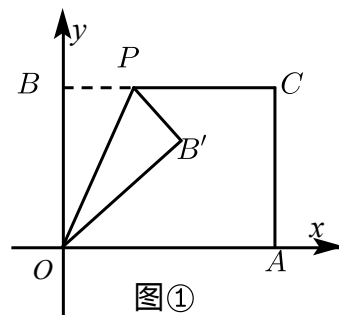
$$\begin{aligned}
&\therefore \angle EPC' = \angle QC'A, \\
&\therefore \triangle PC'E \sim \triangle C'QA, \\
&\therefore \frac{PE}{AC'} = \frac{PC'}{C'Q}, \\
&\therefore PC' = PC = 11 - t, PE = OB = 6, AQ = m, C'Q = CQ = 6 - m, \\
&\therefore AC' = \sqrt{C'Q^2 - AQ^2} = \sqrt{36 - 12m}, \\
&\therefore \frac{6}{\sqrt{36 - 12m}} = \frac{11 - t}{6 - m}, \\
&\therefore \frac{36}{12(3 - m)} = \left(\frac{11 - t}{6 - m} \right)^2, \\
&\therefore 3(6 - m)^2 = (3 - m)(11 - t)^2, \\
&\therefore m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6, \\
&\therefore 3\left(-\frac{1}{6}t^2 + \frac{11}{6}t\right)^2 = \left(3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{11}{6}t - 6\right)(11 - t)^2, \\
&\therefore \frac{1}{12}t^2(11 - t)^2 = \left(-\frac{1}{6}t^2 + \frac{11}{6}t - 3\right)(11 - t)^2, \\
&\therefore \frac{1}{12}t^2 = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{11}{6}t - 3, \\
&\therefore 3t^2 - 22t + 36 = 0, \\
&\text{解得: } t_1 = \frac{11 - \sqrt{13}}{3}, t_2 = \frac{11 + \sqrt{13}}{3}, \\
&\text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{11 - \sqrt{13}}{3}, 6\right) \text{ 或 } \left(\frac{11 + \sqrt{13}}{3}, 6\right). \\
&\text{方法二: } \because \angle BPO = \angle OPC' = \angle POC', \\
&\therefore OC' = PC' = PC = 11 - t, \\
&\text{过点 } P \text{ 作 } PE \perp OA \text{ 于点 } E, \\
&\text{则 } PE = BO = 6, OE = BP = t, \\
&\therefore EC' = 11 - 2t, \\
&\text{在 Rt}\triangle PEC' \text{ 中, } PE^2 + EC'^2 = PC'^2, \\
&\text{即 } (11 - t)^2 = 6^2 + (11 - 2t)^2, \\
&\text{解得: } t_1 = \frac{11 - \sqrt{13}}{3}, t_2 = \frac{11 + \sqrt{13}}{3}, \\
&\text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{11 - \sqrt{13}}{3}, 6\right) \text{ 或 } \left(\frac{11 + \sqrt{13}}{3}, 6\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

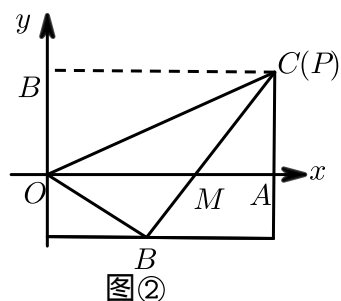
13. 已知一个矩形纸片 $OACB$ ，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点 $A(11, 0)$ ，点 $B(0, 6)$ ，点 P 为 BC 边上的动点。

(1)

如图①，经过点 O 、 P 折叠该纸片，得点 B' 和折痕 OP ，当点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 6)$ 时，求 $\angle BOP$ 的度数．



(2) 如图②，当点 P 与点 C 重合时，经过点 O 、 P 折叠纸片，使点 B 落在点 B' 的位置， $B'C$ 与 OA 交于点 M ，求点 M 的坐标．



(3) 过点 P 作直线 PQ ，交 OA 于点 Q ，再取 BO 中点 T ， AC 中点 N ，分别以 TP ， PN ， NQ ， QT 为折痕，依次折叠该纸片，折叠后点 O 的对应点与点 B 的对应点恰好重合，且落在线段 PQ 上， A 、 C 的对应点也恰好重合，也落在线段 PQ 上，求此时点 P 的坐标（直接写出结果即可）．

【答案】 (1) 30° .

(2) $M\left(\frac{157}{22}, 0\right)$.

(3) $P\left(\frac{11 + \sqrt{85}}{2}, 6\right)$ 或 $\left(\frac{11 - \sqrt{85}}{2}, 6\right)$.

【解析】 (1) $\tan \angle BOP = \frac{BP}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle BOP = 30^\circ$,

故答案为： 30° .

(2) 由折叠知 $\angle BCO = \angle B'CO$,

$\therefore BC \parallel OA$,

$\therefore \angle BCO = \angle AOC$,

$\therefore \angle OCM = \angle MOC$,

$\therefore OM = CM$,

设 $OM = CM = x$,

$\therefore AM = 11 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, $AM^2 + AC^2 = CM^2$,

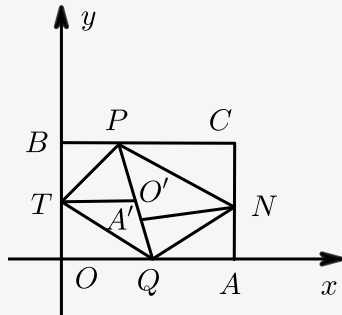
即 $(11 - x)^2 + 6^2 = x^2$,

解得: $x = \frac{157}{22}$,

$\therefore M\left(\frac{157}{22}, 0\right)$.

故答案为: $M\left(\frac{157}{22}, 0\right)$.

(3)



由折叠知 $\angle BTP = \angle O'TP$, $\angle OTP = \angle O'TP$,

$\therefore \angle PTQ = \angle PTO' + \angle O'TQ = 90^\circ$,

同理可得 $\angle PNQ = \angle TPN = \angle TQN = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $TPNQ$ 为矩形,

$\therefore \angle BPT + \angle CPN = 90^\circ$,

$\angle BPT + \angle BTP = 90^\circ$,

$\therefore \angle BTP = \angle CPN$,

又 $\therefore \angle PBT = \angle C$,

$\therefore \triangle TBP \sim \triangle PCN$,

设 $BP = a$, 则 $CP = 11 - a$,

$\therefore \frac{BT}{PC} = \frac{BP}{CN}$, 即 $\frac{3}{11 - a} = \frac{a}{3}$,

解得 $a = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{2}$,

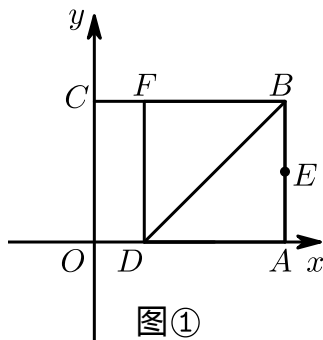
$\therefore P\left(\frac{11 + \sqrt{85}}{2}, 6\right)$ 或 $\left(\frac{11 - \sqrt{85}}{2}, 6\right)$.

故答案为: $P\left(\frac{11 + \sqrt{85}}{2}, 6\right)$ 或 $\left(\frac{11 - \sqrt{85}}{2}, 6\right)$.

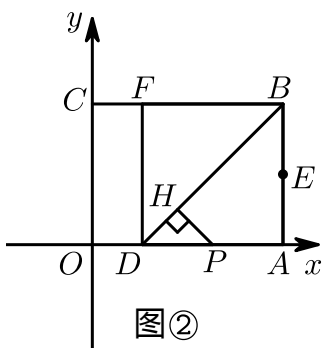
【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

5. 线段和差最值

14. 如图①，将一个矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是 $(3, 0)$ ，点 C 的坐标是 $(0, 2)$ ，点 O 的坐标是 $(0, 0)$ 。点 E 是 AB 的中点，在 OA 上取一点 D ，将 $\triangle BDA$ 沿 BD 翻折，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处。



- (1) 求点 E 、 F 的坐标。
 (2) 如图②，若点 P 是线段 DA 上的一个动点（点 P 不与点 D 、 A 重合），过点 P 作 $PH \perp DB$ 于 H ，设 OP 的长为 x ， $\triangle DPH$ 的面积为 S ，试用关于 x 的代数式表示 S 。



- (3) 在 x 轴、 y 轴上分别存在点 M 、 N ，使得四边形 $MNFE$ 的周长最小，请直接写出四边形 $MNFE$ 的周长最小值。

【答案】 (1) $E(3, 1)$ ， $F(1, 2)$ 。

(2) $S = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ 。

(3) $5 + \sqrt{5}$ 。

【解析】 (1) $A(3, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，

$$\therefore OA = 3, OC = AB = 2.$$

$\because E$ 为 AB 中点，

$$\therefore AE = 1,$$

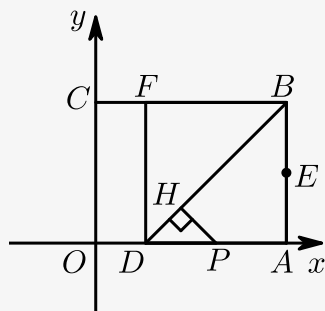
$$\therefore E(3, 1).$$

由折叠性质可知， $BF = AB = 2$ ，

$$\therefore CF = 1,$$

$$\therefore F(1, 2).$$

(2) 如图,



$\therefore$ 将 $\triangle BDA$ 沿 BD 翻折, 使点 A 落在 BC 边上的点 F 处,

$$\therefore BF = AB = 2,$$

$$\therefore OD = CF = 3 - 2 = 1.$$

设 $OP = x$, 则 $PD = x - 1$,

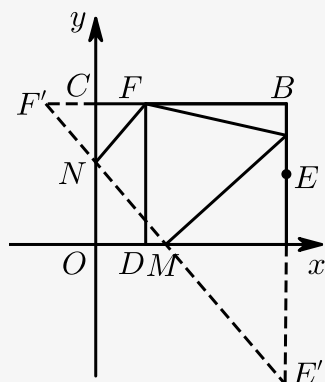
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = 2$, $AD = 2$,

$$\therefore \angle ADB = 45^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle PDH$ 中, $PH = DH = DP \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$,

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} \times DH \times PH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(3) 如图, 作点 F 关于 y 轴的对称点 F' ,



点 E 关于 x 轴的对称点 E' ,

连接 $E'F'$ 交 y 轴于点 N , 交 x 轴于点 M ,

此时四边形 $MNF E$ 的周长最小.

点 $F(1, 2)$ 关于 y 轴对称点 $F'(-1, 2)$,

点 $E(3, 1)$ 关于 x 轴对称点 $E'(3, -1)$.

设 $E'F'$ 解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} -k + b = 2 \\ 3k + b = -1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases},$$

$$\therefore E'F' : y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = \frac{5}{4},$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = \frac{5}{3}.$$

$$\therefore N\left(0, \frac{5}{4}\right), M\left(\frac{5}{3}, 0\right).$$

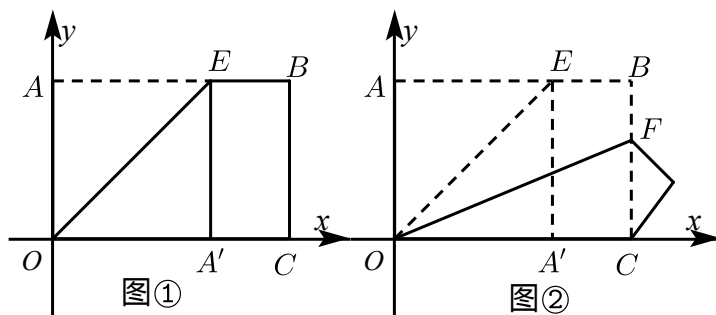
此时，四边形 $MNF'E$ 的周长为：

$$\begin{aligned} E'F' + EF &= \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} \\ &= 5 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

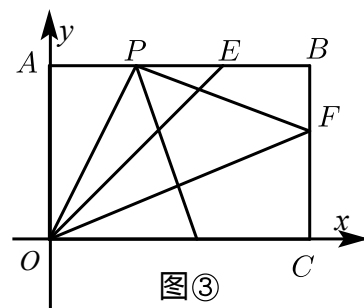
$\therefore$ 在 x 轴， y 轴上分别存在点 M, N ，使得四边形 $MNF'E$ 的周长最小，
最小值为 $5 + \sqrt{5}$ 。

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题（非函数）

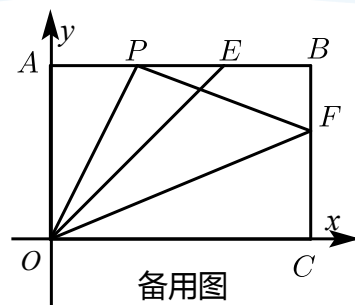
15. 将一个矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，点 $O(0,0)$ ，点 $A(0,2)$ ，点 E, F 分别在边 AB, BC 上。沿着 OE 折叠该纸片，使得点 A 落在 OC 边上，对应点为 A' ，如图①。再沿 OF 折叠，这时点 E 恰好与点 C 重合，如图②。



- (1) 求点 C 的坐标。
(2) 将该矩形纸片展开，再折叠该矩形纸片，使点 O 与点 F 重合，折痕与 AB 相交于点 P ，展开矩形纸片，如图③。



- ① 求 $\angle OPF$ 的大小。
② 点 M, N 分别为 OF, OE 上的动点，当 $PM + MN$ 取得最小值时，求点 N 的坐标（直接写出结果即可）。



【答案】(1) $C(2\sqrt{2}, 0)$.

(2) ① 90° .

② $N(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

【解析】(1) $\because$ 点 $A(0, 2)$, $\therefore OA = 2$.

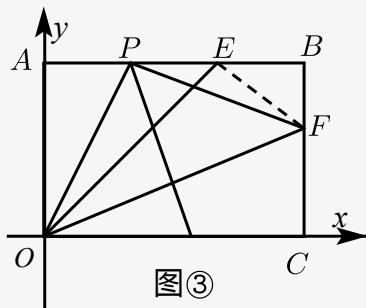
由两次折叠可知, $OA' = OA = 2$, $OC = OE$.

$\therefore OA'E$ 是正方形. $\therefore OA' = A'E = 2$.

在 $Rt\triangle OA'E$ 中, $OE = \sqrt{OA'^2 + A'E^2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$.

(2) ① 如图③, 连接 EF , 由 $OA = 2$ 和 (1) 可知,



$OC = AB = 2\sqrt{2}$, 而 $\angle OAP = \angle PBF = 90^\circ$,

$\angle AOE = \angle AEO = \angle BEF = \angle BFE = 45^\circ$,

故 $OA = AE = 2$, $BF = BE = 2\sqrt{2} - 2$,

设 $AP = x$, 则 $PB = 2\sqrt{2} - x$,

由 $PO = PF$ 即 $PO^2 = PF^2$,

得 $2^2 + x^2 = (2\sqrt{2} - x)^2 + (2\sqrt{2} - 2)^2$, 解得 $x = 2\sqrt{2} - 2$.

所以 $AP = BF$, 则有 $Rt\triangle POA \cong Rt\triangle FPB$,

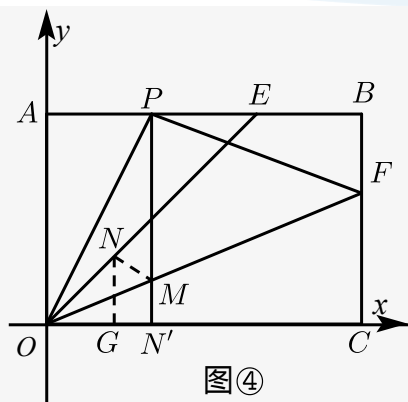
得 $\angle POA = \angle FPB$,

又 $\angle POA + \angle APO = 90^\circ$,

则 $\angle FPB + \angle APO = 90^\circ$,

即 $\angle OPF = 180^\circ - (\angle FPB + \angle APO) = 90^\circ$.

② 如图④,



图④

$$ON = ON' = AP = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$ON \sin 45^\circ = ON \cos 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

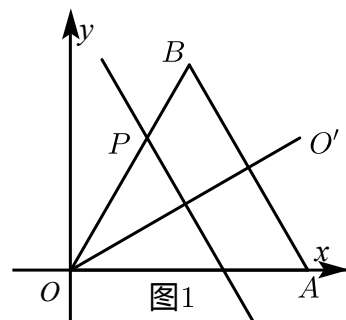
$$\therefore N(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

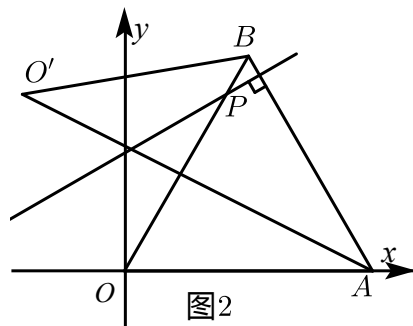
6. 找隐圆

典题精炼

16. 平面直角坐标系中， $\triangle OAB$ 是等边三角形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(8,0)$ ，点 P 是 OB 边上的一个动点（与点 A 、 B 不重合）. 直线 l 是经过点 P 的一条直线，把 $\triangle OAB$ 沿直线 l 折叠，点 O 的对应点是 O' .
 (1) 如图1，当 $OP = 5$ 时，若直线 $l \parallel AB$ ，求点 O' 的坐标.



- (2) 如图2，当点 P 在 OB 边上运动时，若 $l \perp AB$ ，求 $\triangle ABO'$ 的面积.



- (3) 当 $OP = 6$ 时，在直线 l 变化过程中，求 $\triangle ABO'$ 面积的最大值（直接写出结果即可）.

【答案】(1) $\left(\frac{15}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) $16\sqrt{3}$.

(3) $24 + 4\sqrt{3}$.

【解析】(1) 设直线 l 交 OA 于点 C . 连接 OO' 交 PC 于点 D .

$$\because PC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OPC = \angle B = 60^\circ, \angle OCP = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle PCO \text{ 是等边三角形},$$

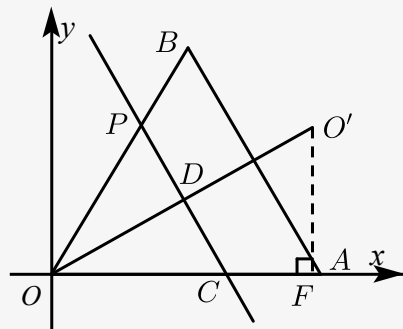
$$\because OP = 5, O, O' \text{ 关于 } PC \text{ 对称},$$

$$\therefore OO' \perp PC, OO' = 2OD,$$

$$\therefore OD = OP \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OO' = 5\sqrt{3},$$

过点 O' 作 $O'F \perp OA$ 于点 F , 如图:

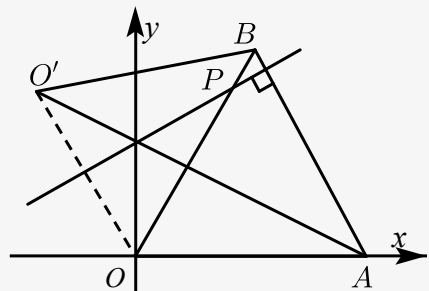


在 $\triangle O'OF$ 中,

$$\text{可得 } OF = OO' \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}, O'F = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{点 } O' \text{ 的坐标为 } \left(\frac{15}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

(2) 连接 OO' , 如图:



$$\because O, O' \text{ 关于直线 } l \text{ 对称},$$

$$\therefore OO' \perp \text{直线 } l,$$

$$\because \text{直线 } l \perp AB,$$

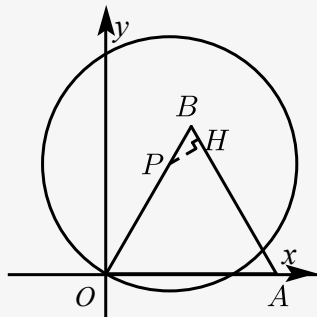
$$\therefore AB \parallel OO',$$

$$\therefore S_{\triangle ABO'} = S_{\triangle AOO'} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 16\sqrt{3}.$$

(3) 由折叠知: $OP = O'P = 6$,

故 O' 在以 P 为圆心, 6 为半径的圆上运动.

作 $PH \perp AB$ 于 H , 如图:



$$\text{则 } PH = BP \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

故 $\triangle ABO'$ 以 AB 为底, 最大高为 $6 + \sqrt{3}$,

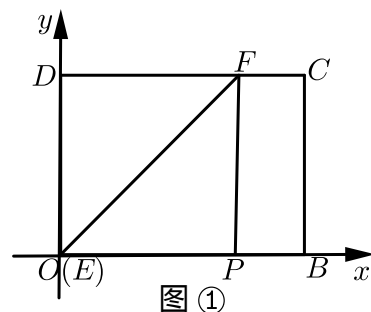
$$S_{\triangle ABO'} \text{ 最大值为 } \frac{1}{2} \times 8 \times (6 + \sqrt{3}) = 24 + 4\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题

17. 已知矩形纸片 $OBCD$ 的边 OB 在 x 轴上, OD 在 y 轴上, 点 C 在第一象限, 且 $OB = 8$, $OD = 6$. 现将纸片折叠, 折痕为 EF (点 E , F 是折痕与矩形的边的交点), 点 P 为点 D 的对应点, 再将纸片还原.

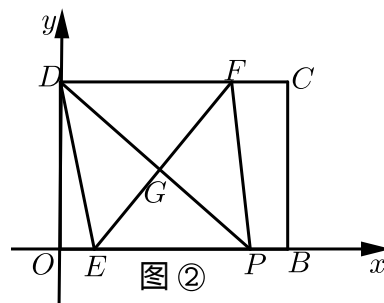
(1) 若点 P 落在矩形 $OBCD$ 的边 OB 上,

① 如图①, 当点 E 与点 O 重合时, 求点 F 的坐标.



图①

② 如图②, 当点 E 在 OB 上, 点 F 在 DC 上时, EF 与 DP 交于点 G , 若 $OP = 7$, 求点 F 的坐标.



图②

(2) 若点 P 落在矩形 $OBCD$ 的内部, 且点 E, F 分别在边 OD , 边 DC 上, 当 OP 取最小值时, 求点 P 的坐标 (直接写出结果即可)

【答案】 (1) ① $(6, 6)$.

② $\left(\frac{85}{14}, 6\right)$.

(2) $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

【解析】 (1) ① $\because$ 折痕为 EF , 点 P 为点 D 的对应点,

$$\therefore \triangle DOF \cong \triangle POF,$$

$$\therefore \angle DOF = \angle POF = 45^\circ,$$

$\because$ 四边形 $OBCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ODF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFO = \angle DOF = 45^\circ,$$

$$\therefore DF = DO = 6.$$

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(6, 6)$.

② $\because$ 折痕为 EF , 点 P 为点 D 的对应点,

$$\therefore DG = PG, EF \perp PD,$$

$\because$ 四边形 $OBCD$ 是矩形,

$$\therefore DC \parallel OB,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle EPG,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle PGE,$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle PGE,$$

$$\therefore DF = PE,$$

$$\therefore DF \parallel PE,$$

$\therefore$ 四边形 $DEPF$ 是平行四边形,

$$\therefore EF \perp PD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $DEPF$ 是菱形,

设菱形的边长为 x , 则 $DE = EP = x$,

$$\therefore OP = 7,$$

$$\therefore OE = 7 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中, 由勾股定理得 $OD^2 + OE^2 = DE^2$,

$$\therefore 6^2 + (7 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{85}{14},$$

$$\therefore DF = \frac{85}{14},$$

$$\therefore \text{点} F \text{的坐标为} \left(\frac{85}{14}, 6 \right).$$

(2) 若点 P 落在矩形 $OBCD$ 的内部, 且点 E 、 F 分别在 OD 、 DC 边上,

如图4, 当 E 固定时, 在 F 的运动过程中, 因为 D 、 P 对称, 所以 EF 是 PD 的垂直平分线, 则 $ED = EP$, P 在以 E 为圆心, DE 为半径的圆弧上, 此时当 P 在 OB 边上 OP 有最小值;

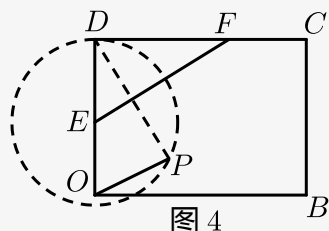


图 4

如图5, 当 F 固定时, 在 E 的运动过程中, P 以 F 为圆心, 以 FD 为半径的圆上, 此时连接 OF , 当 P 在 OF 上时, OP 的值最小;

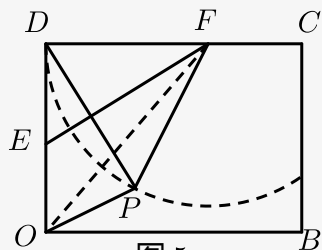


图 5

所以如图6, 当 F 与 C 重合, 点 P 在对角线 OC 上时, OP 有最小值;

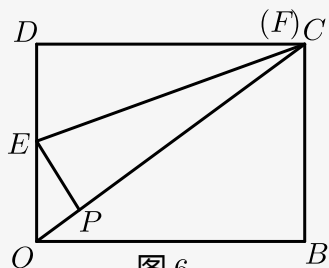


图 6

$$\therefore OB = 8, OD = BC = 6,$$

$$\therefore OC = 10,$$

$$\therefore CD = PC = 8,$$

$$\therefore OP = OC - CP = 2,$$

过点 P 作 $PQ \perp AB$ 与 Q ,

$$\text{则} \angle PQO = \angle CBO = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle POQ = \angle COB,$$

$$\therefore \triangle POQ \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{PO}{OC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{OQ}{OB},$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2}{10} &= \frac{PQ}{6} = \frac{OQ}{8}, \\ \therefore PQ &= \frac{6}{5}, OQ = \frac{8}{5}, \\ \therefore \text{点} P &\text{的坐标为} \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right).\end{aligned}$$

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

7. 存在性问题

典题精炼

18. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(3,0)$ ，点 $C(0,4)$ ； D 为 AB 边上的动点．

(1) 如图1，将 $\triangle ABC$ 对折，使得点 B 的对应点 B_1 落在对角线 AC 上，折痕为 CD ，求此刻点 D 的坐标．

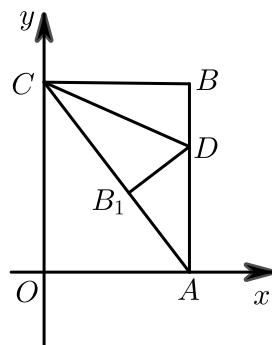


图1

(2) 如图2，将 $\triangle ABC$ 对折，使得点 A 与点 C 重合，折痕交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，求直线 CD 的解析式．

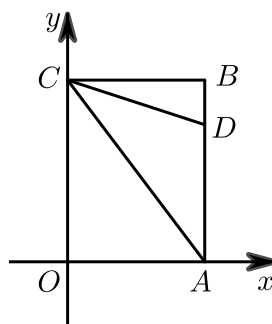
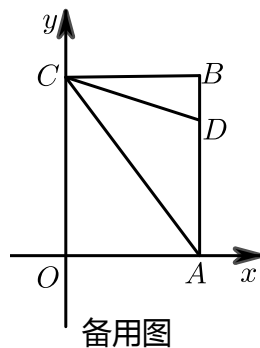


图2

(3) 在坐标平面内，是否存在点 P (除点 B 外)，使得 $\triangle APC$ 与 $\triangle ABC$ 全等？若存在，请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



【答案】(1) $D\left(3, \frac{5}{2}\right)$

(2) $y = -\frac{7}{24}x + 4$.

(3) 存在; $(0, 0)$, $\left(\frac{96}{25}, \frac{72}{25}\right)$, $\left(-\frac{21}{25}, \frac{28}{25}\right)$.

【解析】(1) 由折叠知: $BC = B_1C = 3$,

设 $BD = B_1D = x$,

则 $AD = 4 - x$, $AB_1 = 5 - 3 = 2$.

在 $\text{Rt}\triangle AB_1D$ 中: $AB_1^2 + B_1D^2 = AD^2$,

即 $4 + x^2 = (4 - x)^2$, 解得: $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore AD = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

$\therefore D\left(3, \frac{5}{2}\right)$

(2) 由折叠可知: $CD = AD$,

设 $AD = x$, 则 $CD = x$, $BD = 4 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中: $BD^2 + BC^2 = CD^2$,

即: $(4 - x)^2 + 3^2 = x^2$, 解得 $x = \frac{25}{8}$,

此时 $AD = \frac{25}{8}$,

$\therefore D\left(3, \frac{25}{8}\right)$.

设 CD 解析式为: $y = kx + b$,

将 C 、 D 代入有 $\begin{cases} b = 4 \\ 3k + 4 = \frac{25}{8} \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k = -\frac{7}{24} \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y = -\frac{7}{24}x + 4$.

(3) ① 当点 P 与点 O 重合时, $\triangle APC \cong \triangle CBA$, 此时 $P(0, 0)$.

② 当点 P 在第一象限时, 如图1,

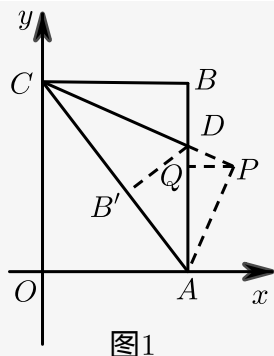


图1

由 $\triangle APC \cong \triangle CBA$ 得 $\angle ACP = \angle CAB$,

则点 P 在直线 CD 上, 过 P 作 $PQ \perp AD$ 于点 Q ,

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中,

$$AD = \frac{25}{8}, AP = BC = 3, PD = BD = 4 - \frac{25}{8} = \frac{7}{8},$$

$$\text{由 } AD \times PQ = DP \times AP \text{ 得: } \frac{25}{8}PQ = 3 \times \frac{7}{8},$$

$$\therefore PQ = \frac{21}{25}.$$

$$\therefore x_P = 3 + \frac{21}{25} = \frac{96}{25}.$$

$$\text{把 } x = \frac{96}{25} \text{ 代入 } y = -\frac{7}{24}x + 4 \text{ 得 } y = \frac{72}{25}.$$

$$\text{此时: } P\left(\frac{96}{25}, \frac{72}{25}\right).$$

③当点 P 在第二象限时, 如图2,

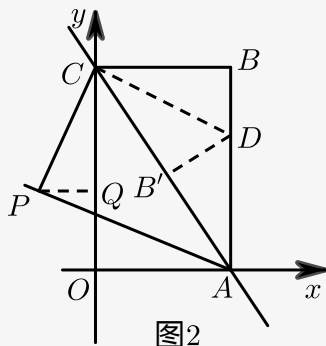


图2

$$\text{同理可求得: } PQ = \frac{21}{25},$$

在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中,

$$CQ = \sqrt{PC^2 - PQ^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{21}{25}\right)^2} = \frac{72}{25},$$

$$\therefore OQ = 4 - \frac{72}{25} = \frac{28}{25}.$$

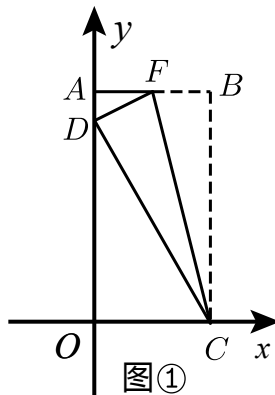
$$\text{此时 } P\left(-\frac{21}{25}, \frac{28}{25}\right),$$

综上, 满足条件的点 P 有三个, 分别为: $(0, 0)$, $\left(\frac{96}{25}, \frac{72}{25}\right)$, $\left(-\frac{21}{25}, \frac{28}{25}\right)$.

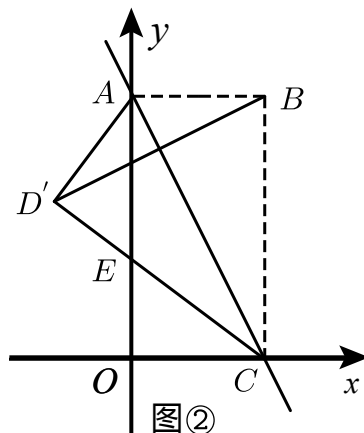
【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用

19. 在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的边 OC 、 OA 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上，点 A 的坐标为 $(0, 8)$ ，点 C 的坐标为 $(4, 0)$ 。

(1) 如图①，将矩形 $OABC$ 折叠，使点 B 落在 y 轴的点 D 处，折痕为线段 CF ，求点 D 的坐标。



(2) 如图②，将矩形 $OABC$ 沿对角线 AC 所在的直线折叠，点 B 落在点 D' 处， CD' 与 y 轴相交于点 E ，求点 E 的坐标。



(3) 在(II)的情况下，若点 P 是坐标平面内任意一点，点 Q 是直线 AC 上的一个动点，使以点 E 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形，请直接写出满足条件的点 P 的坐标。

【答案】 (1) $(0, 4\sqrt{3})$ 。

(2) $(0, 3)$ 。

(3) $P_1(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5} + 3)$ 或 $P_2(4, 5)$ 或 $P_3(\sqrt{5}, 3 - 2\sqrt{5})$ 或 $P_4(\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$ 。

【解析】 (1) $\triangle BCF$ 翻折得到 $\triangle DCF$ ，

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle DCF,$$

$$DC = BC = 8,$$

$$\text{Rt}\triangle DOC \text{ 中, } DC = 8, OC = 4,$$

$$\therefore OD = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore D \text{ 的坐标 } (0, 4\sqrt{3}).$$

(2) $\triangle ABC$ 翻折得到 $\triangle AD'C$ ，

$$\therefore \triangle ABC \triangle AD'C,$$

$$AD' = AB = OC = 4,$$

在 $\triangle AD'E'$ 和 $\triangle COE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AD'E' = \angle COE = 90^\circ \\ \angle AED' = \angle CEO \\ AD' = CO \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AD'E' \cong \text{Rt}\triangle COE (\text{AAS}),$$

$$\text{设 } OE = a,$$

$$\text{则 } AE = CE = 8 - a,$$

$\text{Rt}\triangle EOC$ 中, 由勾股定理得:

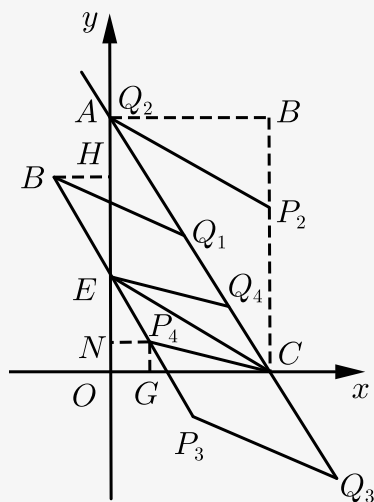
$$a^2 + 4^2 = (8 - a)^2,$$

$$a = 3,$$

$$\therefore OE = 3,$$

E 坐标为 $(0, 3)$.

(3) 如图, 过 P_1 作 $P_1H \perp AO$ 于 H ,



$\therefore P_1ECQ$ 为菱形,

$$\therefore P_1E = CE, P_1E \parallel CE,$$

$$CE = \sqrt{OC^2 + OE^2} = 5,$$

$$\therefore \angle P_1EH = \angle OAC,$$

$$\therefore \frac{P_1H}{EH} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{设 } P_1H = k, HE = 2k,$$

$$\therefore P_1E = \sqrt{5}k = 5,$$

$$\therefore P_1H = \sqrt{5}, HE = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore OH = 2\sqrt{5} + 3,$$

$$\therefore P_1 \text{ 坐标为 } (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5} + 3), \text{ 同理, } P_3 \text{ 坐标为 } (\sqrt{5}, 3 - 2\sqrt{5}),$$

当 A 与 Q 重合时, 四边形 Q_2ECP_2 是菱形,

$\therefore Q_2ECP_2$ 为菱形,

$\therefore EQ_2 // CP_2$,

$EQ_2 = CP_2 = 5$,

$\therefore P_2(4, 5)$,

当 CE 是 EP_4CQ_4 菱形的对角线时,

$EP_4 = 5$, $EP_4 // AC$,

在上图中, 作 $P_4G \perp x$ 轴于 G ,

作轴 $P_4N \perp y$ 于 N ,

则 $P_4N = OG$, $P_4G = ON$, $EP_4 // AC$,

$\therefore \frac{P_4N}{EN} = \frac{1}{2}$,

设 $P_4N = x$, $EN = 2x$,

$\therefore P_4E = CP_4 = \sqrt{5}x$,

$\therefore P_4G = ON = 3 - 2x$, $CG = 4 - x$,

$\therefore (3 - 2x)^2 + (4 - x)^2 = (\sqrt{5}x)^2$,

$\therefore x = \frac{5}{4}$, $3 - 2x = \frac{1}{2}$,

$\therefore P_4(\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$,

综上, 符合条件的 P 点为 $P_1(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5} + 3)$ 或 $P_2(4, 5)$ 或 $P_3(\sqrt{5}, 3 - 2\sqrt{5})$ 或 $P_4(\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$.

【标注】【知识点】菱形的性质

【知识点】勾股定理与实际问题

【知识点】三角形折叠

【知识点】轴对称的定义

【知识点】旋转的性质

8. 定值问题

20. 将一个正方形纸片 $AOBC$ 放置在平面直角坐标系中, 点 $A(0, 4)$, 点 $O(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$

点. 动点 E 在边 AO 上, 点 F 在边 BC 上, 沿 EF 折叠该纸片, 使点 O 的对应点 M 始终落在边 AC 上 (点 M 不与 A , C 重合), 点 B 落在点 N 处, MN 与 BC 交于点 P .

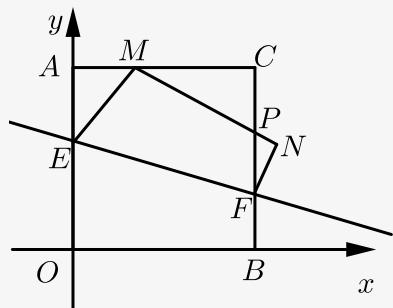
(1) 如图①, 当 $\angle AEM = 30^\circ$ 时, 求点 E 的坐标.

$$\text{即 } x^2 = 2^2 + (4-x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(3) 不变, 为8.



理由:

设 $AM = y$, 则 $OE = EM = x$, $MC = 4 - y$.

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中,

$$AE^2 + AM^2 = EM^2,$$

$$\therefore (4-x)^2 + y^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } 6 + y^2 = 8x,$$

$$\because \angle EMP = 90^\circ, \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle CMP,$$

$$\therefore \frac{AE + EM + AM}{CM + CP + MP} = \frac{AE}{CM},$$

$$\text{即 } \frac{4 + y}{CM + CP + MP} = \frac{4 - x}{4 - y},$$

$$\therefore CM + CP + MP = \frac{6 - y^2}{4 - x} = \frac{16 - (8x - 16)}{4 - x} = 8.$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理